Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής 18/10/2016

Μια πρόταση $p(n)$ έχει πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο του $\mathbb{N}$: $\exists\, \alpha \in \mathbb{N}$ και η αλήθεια της $p(n)$ εξαρτάται από το n

- Η $P(\alpha)$ είναι αληθής - Απόδειξη
- Υποθέτουμε ότι η $P(k)$ είναι αληθής και αποδεικνείουμε την $P(k+1)$

Τότε η $P(n)$ αληθής $\forall n \geq \alpha$

Ισχυρή Μ.Ε.

Έχουμε την $P(n)$ και δύο φυσικούς $\alpha \leq b$

- Αποδεικνύουμε $P(\alpha), P(\alpha+1), \ldots, P(b)$
- Για κάθε $k > b$, αν η αλήθεια της $P(i)$ για $\alpha \leq i < k$ συνεπάγεται την αλήθεια της $P(k)$

Τότε η $P(n)$ είναι αληθής για $n \geq \alpha$

Π.χ. Κάθε συλλογή k αλόγων έχει το ίδιο χρώμα.
$\Rightarrow$ Όλα τα άλογα έχουν το ίδιο χρώμα.

$k=1$ $P(1)$ αληθής

Υποθέτουμε ότι $P(k)$ αληθής $\overset{???}{\Rightarrow}$ $P(k+1)$ αληθής

$\{1, \underbrace{\ldots, k, k+1}_{\text{άσπρα}}\}$ $\Rightarrow$ Όλα τα άλογα είναι άσπρα

Η αρχή της καλής διάταξης

Έστω $S \subseteq \mathbb{N}$ ώστε κάθε στοιχείο του να είναι μεγαλύτερο από κάποιο σταθερό ακέραιο. Τότε το S έχει ελάχιστο στοιχείο $\exists\, s_0 \in S$ με $s_0 \leq s \quad \forall s \in S$

π.χ. $(0,1]$

$$S = \{n \geq 1 \text{ με } n^2 < n\} = \emptyset$$

$$S = \{ n \geq 1 \text{ με } n = 46 - 7k,\ k \in \mathbb{Z} \} \neq \emptyset$$

Για $k<0 \Rightarrow$ το S περιέχει άπειρους φυσικούς

$\overset{ΑΚΔ}{\Longrightarrow}$ το S έχει ελάχιστο s_0

$$1 \leq 46 - 7k \Rightarrow 7k \leq 45 \Rightarrow k \leq \frac{45}{7} \Rightarrow k \leq \left[\frac{45}{7}\right] = 6$$

Άρα $k \leq 6$

Ελάχιστο $k = 6 \Rightarrow s_0 = 4 = \min S$

ΘΕΩΡΗΜΑ (χωρίς απόδειξη)

$Μ.Ε \Leftrightarrow Ι.Μ.Ε \Leftrightarrow Α.Κ.Δ.$

ΘΕΩΡΗΜΑ Διαίρεσης

Έστω n ακέραιος και d θετικός φυσικός. Τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι q και r ώστε $n = dq + r$ με $0 \leq r < d$

Απόδειξη

Έστω $S=\{ s\in\mathbb{N}$ με $s=n-dx$, για $x\in\mathbb{Z}\}$

$S\neq\emptyset$

Αν $n\geq 0 \Rightarrow$ για $x=0 \Rightarrow 0=0-d\cdot 0 \in\mathbb{N}$

Αν $n<0$ και $x\ll 0 \Rightarrow n-dx>0 \Rightarrow S\neq\emptyset$

πολύ μικρός

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Α.Κ.Δ.

$\Rightarrow$ Το S έχει ελάχιστο.

Καλούμε το ελάχιστο $r \Leftrightarrow \exists q_0\in\mathbb{Z}$ ώστε $r=n-dq_0\geq 0$

Πρέπει $r<d$. Αν είχαμε $r\geq d$, $d\leq r=n-dq_0$

$d\leq r=n-dq_0$

$-d+d\leq r-d=n-d(q_0-1)$

$\in S$, $r-d<r$ Αδύνατο για r ελάχιστο

Υπάρχουν q_0 και r με $n=dq_0+r$, $0\leq r<d$

Μοναδικότητα: Έστω ότι υπάρχουν q_0 και r

$n=dq_0+r=dq_0'+r'$ με $0\leq r,r'<d$

Έστω ότι $r'>r \Rightarrow r'-r=n-dq_0'-n+dq_0=$

$r'-r=d(q_0-q_0')$ (+)

$r,r'<d \Rightarrow \boxed{|r-r'|<d}$ (++) γιατί:

$$\left.\begin{array}{l} r'<d \qquad 0\leq r'\leq d \\ r<d \Rightarrow (-) \ \underline{-d<-r} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad -d\leq r'-r\leq d \Leftrightarrow |r-r'|<d$$

(+) και (++) $\Rightarrow r=r'$, $q=q_0$

Θεώρημα
1) Κάθε φυσικός $n>1$ έχει πρώτο διαιρέτη

2) Υπάρχουν άπειροι πρώτοι

ΠΡΟΤΑΣΗ
Κάθε σύνθετος φυσικός a έχει τουλάχιστον ένα πρώτο διαιρέτη $p \le \sqrt{a}$

Απόδειξη
a σύνθετος $\Rightarrow a = cd$ με $1 < c, d < a$
Έστω ότι $c < d \Rightarrow c^2 < cd = a \Rightarrow c = \sqrt{a}$

$1 < c$ φυσικός $\Rightarrow \exists\, p$ πρώτος με $p | c$
Επίσης $c | a = cd$
$c = pp' \Rightarrow a = pp'd \Rightarrow p | a$ και $p \le \sqrt{a}$

ΠΟΡΙΣΜΑ
Αν ο $a > 1$ δεν διαιρείται από κανένα πρώτο μικρότερο του $\sqrt{a}$, τότε ο a είναι πρώτος

Απόδειξη
Έστω a όχι πρώτος $\Leftrightarrow a$ σύνθετος
Με το προηγούμενο $\exists\, p$ πρώτος $\le \sqrt{a}$ ώστε $p | a$
Αδύνατο

Πρόβλημα
Να βρεθούν όλοι οι πρώτοι ≤ 100

$\sqrt{100} = 10$ όλους τους πρώτους μέχρι το $10: 2, 3, 5, 7$
Βρες τα πολλαπλάσια αυτών
$2, 4, 6, 8 \dots \dots 78, 100$
$3, 6, 9, 12 \dots \dots 99$
$5, 10, 15, 20 \dots \dots 100$
$7, 14, 21, 28 \dots \dots 98$

Κόσκινο του Ερατοσθένη
Από τους αριθμούς $2, \dots, 100$ αφαιρούμε τα γνήσια πολλαπλάσια των πρώτων $\leq \sqrt{100} = 10: 2, 3, 5, 7$
Οι αριθμοί που μένουν είναι οι ζητούμενοι πρώτοι.

ΘΕΩΡΗΜΑ
Αν ο P είναι πρώτος και διαιρεί το γινόμενο ab, τότε διαιρεί έναν από τους δύο
$p|ab = p|a$ ή $p|b$ (χωρίς απόδειξη)

ΘΕΩΡΗΜΑ Πρωτογενούς Ανάλυσης SOS
Κάθε φυσικός γράφεται μοναδικά σαν γινόμενο πρώτων

Απόδειξη
Έστω $a > 1$ $\begin{cases} \to a \text{ πρώτος Τέλος} \\ \to a \text{ σύνθετος} \end{cases}$

$a = cd \Rightarrow \exists p$ πρώτος $\leq \sqrt{a}$ με $p|a$
Εφαρμόζω το Θ. της διαίρεσης για a και p.
$\exists a'$ με $a = pa' + 0$
Τώρα $a' < a$. Εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία για τον a'.
Θα βρούμε πρώτο $p' \leq \sqrt{a}$ με $p'|a'$ και $a'|a$
Εφαρμόζουμε τη διαίρεση $a' = p'a''$ με $a'' < a'$

Μετά από πεπερασμένα βήματα θα καταλήξουμε σε κάποιον πρώτο

Άρα $\alpha = p_1^{k_1} p_2^{k_2}, \ldots, p_m^{k_m}$ με $2 \leq p_1 < p_2 < \ldots < p_m$

p_i πρώτοι και διαφορετικοί. Επίσης $1 \leq k_i$

$$\begin{array}{r|l} 786 & 2 \\ 393 & 3 \\ 131 & 131 \end{array}$$

$786 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 131^1 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \ldots 131^1$

Μαγικά Τετράγωνα

$n=3$

$1, \ldots, n^2$

$1, \ldots, 9$

2	9	4
7	5	3
6	1	2

$n=4$

1	8	15	10
12	13	6	3
14	11	4	5
7	2	9	16

Να βρεθεί το άθροισμα μιας γραμμής ενός μαγικού τετραγώνου πλευράς n.